УДК 330.45:519.872

В.В. СЕМЕНОВ,
кандидат технічних наук, старший науковий співробітник
Інституту демографії та соціальних досліджень
ім. М.В. Птухи НАН України

ІНДЕКС НЕРІВНОСТІ АТКІНСОНА, ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ ТА СОЦІАЛЬНА ІНТЕРПРЕТАЦІЯ
(до сорокаріччя із дня опублікування)*

Вступ. У 2010 р. виповнилось 40 років від дня опублікування знаменитої статті Ентоні Аткінсона ”До вимірювання нерівності“ [4], в якій було анонсовано новий індекс нерівності, що надалі отримав ім'я автора. Ця стаття здійснила та здійснює визначальний вплив на подальший розвиток так званої економіки добробуту та теорії соціального вибору. Оцінювання добробуту за розподілом доходів (або будь-якої іншої змінної, пов'язаної із індивідуальним добробутом) є важливим завданням економіки суспільства. Логічна завершеність цього підходу означає, що ми повинні бути спроможні порівняти будь-які два розподіли доходів і визначити, який з них відповідає більш високому рівню суспільного добробуту. Іншими словами, необхідно вибрати індекси нерівності, які задовольняють конкретним математичним властивостям (аксіомам) і узгоджені із уявленнями суспільства про принципи соціальної справедливості (морально-етичні постулати).

Дискусії Пігу та Дальтона із соціалістами на початку минулого сторіччя привели до розуміння соціальної справедливості як компромісу між вирівнюючим перерозподілом суспільних економічних благ та загальною ефективністю економіки. Ідеї, які неявно присутні в роботах М. Лоренса та А. Пігу, в явному виді вперше сформульовані Х. Дальтоном [7]: функція соціального добробуту має бути строго угнутою за Шуром (S – угнутою), відповідно, індекс нерівності, оснований на цій функції, має бути строго S – опуклим. Формальне відображенням такого розуміння соціальної справедливості дістало назву принципу трансфертів Пігу – Дальтона, що є одним з основних принципів економіки добробуту: регресивний трансферт корисності приводить до зростання нерівності (зменшення суспільного добробуту), а прогресивний, навпаки, до зменшення нерівності та зростання суспільного добробуту. На основі наведеного принципу можуть бути побудовані індекси, що відповідають набагато менш радикальній програмі, ніж егалітарна.

* Проф. Ентоні Аткінсон не заперечує проти опублікування своєї відомої статті “On the measurement of inequality” (Journal of Economic Theory, September, 1970, vol.2 Issue 3, pp. 244–263) у даному випуску журналу. Проте власник, видавництво Elsevier (http: //www.elsevier.com), запросив за право переопублікування 900,00USD . Такі кошти у редакції відсутні.

Метою даної статті є дослідження властивостей індексу нерівності Аткінсона як нормативного інструменту аналізу соціально-економічної політики.

Виклад основного матеріалу. **Аксіоматичне визначення індексу нерівності Аткінсона**. Нехай $x=(x_1, x_2 \dots x_n)$ – вектор доходів N осіб впорядкований по зростанню $x_i \geq 0$ $i=1,2,\dots, N$. μ – середній дохід, e – одиничний вектор *(1, 1, ... 1)* розмірності N, П – довільна перестановка елементів вектора x. Індексом нерівності будемо називати функцію $I(x)$, визначену на додатних розподілах доходів таку, що $0 \leq I(x) \leq 1$, причому $I(x)=0$, тоді і тільки тоді, коли $x = \mu e$, яка задовольняє визначеним нижче властивостям.

1) *Неперервність.* $I(x)$– неперервна функція. Це означає, що незначні зміни доходів не можуть приводити до суттєвих змін у значеннях індексів нерівності.

2) *Анонімність.* $I(x)=I(\Pi x)$, де П – будь-яка матриця перестановок [2]. Ця властивість означає, що при обчисленні нерівності доходів та порівнянні різних розподілів доходів використовується лише величина доходу.

3) *Популяційний принцип.* $I(x, x, \dots, x)=I(x)$ означає, що об'єднання виборок із однаковим розподілом доходів не змінює нерівність.

4) *Інваріантність до шкали.* Індекс нерівності є відносним індексом (однорідним порядку нуль за рівнем доходів): $I(x)=I(\lambda x)$ для довільного скаляра $\lambda > 0$, тобто рівнопропорційне збільшення усіх доходів не змінює нерівність.

5) *Принцип трансфертів Пігу – Дальтона.* $I(y)<I(x)(I(y)>I(x))$, якщо розподіл y отримано із y при прогресивному (регресивному) трансферті.

6) *S-опуклість* (опуклість за Шуром [1]). Індекс нерівності $I(x)$ є строго S-опуклим, тобто $I(x) = I(Ax)$, де A – довільна бістохастична матриця [1].

Індекс нерівності Аткінсона. Аткінсон [4], використовуючи властивості інваріантності до шкали, адитивної сепарабельності функції корисності та принцип трансфертів Пігу–Дальтона, отримав новий індекс:

$$A_\varepsilon(x) = 1 - \left\{ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{x_i}{\mu} \right]^{1-\varepsilon} \right\}^{1/(1-\varepsilon)}, \varepsilon \geq 0, \varepsilon \neq 1 \quad (1)$$

$$A_1(x) = 1 - \left\{ \prod_{i=1}^{N} \frac{x_i}{\mu} \right\}^{1/N}, \varepsilon = 1, \quad (2)$$

де $0 \leq A_\varepsilon(x) \leq 1$, μ – середній дохід. Основне питання щодо використання індексу Аткінсона стосується вибору значення параметра ε, який є мірою антипатії до нерівності (мірою антипатії до ризиків у теорії прийняття рішень в умовах невизначеності). Цей параме тр може також інтерпретуватись як відносна чутливість трансфертів до різних дохідних рівнів. При зростанні ε більша вага надається трансфертам до нижчих дохідних груп та менша вага трансфертам в протилежному напрямку. При $\varepsilon \to \infty$ ми отримуємо функцію корисності Роулса [12], $u = \min_i \{x_i\}$, згідно з якою враховуються лише трансферти до найбіднішої групи; інший граничний випадок, $\varepsilon = 0$, дає лінійну функцію корисності. При побудові індексу Аткінсона важливу роль відіграє концепція *рівнорозподіленого еквівалентного доходу*, x_{ede}, та функція корисності із постійною еластичністю $u = x^{1-\varepsilon}/(1-\varepsilon), \varepsilon > 0, \varepsilon \neq 1; \ln x, \varepsilon = 1$. Рівнорозподілений еквівалентний дохід має вид:

$$x_{ede} = \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x^{1-\varepsilon} \right)^{1/(1-\varepsilon)} . \qquad (3)$$

Таким чином, згідно із (3) індекс нерівності Аткінсона пропорційний різниці між середнім та еквівалентним рівнорозподіленим доходом x_{ede}:

$$A_{\varepsilon} = 1 - x_{ede} / \mu = 1 - \mu_{1-\varepsilon}^{1/(1-\varepsilon)} / \mu , \qquad (4)$$

де $\mu = \mu_1$ – перший момент розподілу доходів відносно нуля (арифметичне середнє значення), $\mu_{1-\varepsilon}$ – $(1-\varepsilon)$-й момент відносно нуля (узагальнене середнє значення порядку $(1-\varepsilon)$). Із (4) маємо $x_{ede} = \mu(1 - A_{\varepsilon})$. Отже, x_{ede} може інтерпретуватись як функція соціального добробуту (індекс соціального добробуту Сена), де $(1 - A_{\varepsilon})$ – втрати добробуту від існування нерівності в суспільстві, виміряної за індексом Аткінсона. Можна знайти

значення ε та середнє значення корисності, $u_{1-\varepsilon}$, за яких медіанний дохід збігається із рівнорозподіленим еквівалентним доходом. Відповідне значення індексу Аткінсона будемо називати ”природним індексом Аткінсона”. Отже, природний індекс Аткінсона – це відхилення медіанної корисності відносно середнього доходу, тобто для заданого розподілу доречним є індекс із конкретним, ”природним” значенням параметра ε. Наведені міркування дали змогу нам отримати цікавий результат стосовно нормативної значимості відношення медіанного доходу до середнього: $x_{ede} = \mu(1 - A_{\varepsilon}) = \mu(1 - (1 - x_{Me} / \mu)) = x_{Me}$. Тобто медіанний дохід є нормативно визначеним індексом добробуту Сена у випадку оцінювання нерівності розподілу доходів за індексом Аткінсона: *якщо кожній особі в суспільстві буде надано медіанний дохід (рівнорозподілений еквівалентний дохід), рівень добробуту буде збігатися із рівнем добробуту, що відповідає реальному розподілу.* Наприклад, при $x_{Me} / \mu = 0.7$, тобто нерівність, виміряна за індексом Аткінсона становить 0.3, 70% сукупних доходів повинно бути розподілено в суспільстві порівну для того, щоб досягти поточного суспільного добробуту. Наведені міркування мають деякі імплікації стосовно логнормального розподілу, оскільки у цьому випадку медіанний дохід є середнім геометричним значенням: *для гомогенної популяції (гомогенних сегментів ринку праці, соціальних груп тощо) нормативним може вважатись не середнє арифметичне значення доходів, а середнє геометричне (медіанне), що у даному випадку є індексом соціального добробуту Сена*: $x_{ede} = \mu(1 - A_1) = x_{Me}$.

В таблиці 1 наведено значення індексу нерівності Аткінсона при різних значеннях парамера ε та, для порівняння, індексу Джині, за сукупними доходами в Україні за 1999–2009 рр. Індекси обчислені із використанням пакета прикладних програм INEQ, що розроблений у Лондонській школі економіки під керівництвом проф. Ф. Ковела і його можна вільно отримувати через INTERNET.

Таблиця 1

Нерівність сукупних доходів[1] в Україні

Рік	Індекс Джині	Індекс Аткінсона					
		$\varepsilon = 0.25$	$\varepsilon = 0.5$	$\varepsilon = 1$	$\varepsilon = 1.5$	$\varepsilon = 2$	$\varepsilon = 3$
1999	0.2935(5)	0.0361(3)	0.0705(5)	0.1342(5)	0.1924(6)	0.2460(6)	0.3432(5)
2000	0.2964(4)	0.0358(5)	0.0706(4)	0.1364(4)	0.1974(4)	0.2540(4)	0.3585(2)
2001	0.3053(1)	0.0379(1)	0.0744(1)	0.1429(1)	0.2053(1)	0.2617(1)	0.3588(1)
2002	0.2977(3)	0.0359(4)	0.0709)3)	0.1373(3)	0.1987(3)	0.2551(2)	0.3543(3)
2003	0.2833(7)	0.0325(7)	0.0645(7)	0.1265(8)	0.1846(8)	0.2384(8)	0.3335(8)
2004	0.2813(8)	0.0322(8)	0.0644(8)	0.1278(7)	0.1885(7)	0.2455(7)	0.3467(4)
2005	0.3034(2)	0.0372(2)	0.0731(2)	0.1402(2)	0.2006(2)	0.2542(3)	0.3428(6)
2006	0.2903(6)	0.0340(6)	0.0675(6)	0.1322(6)	0.1926(5)	0.2479(5)	0.3427(7)
2007	0.2459(11)	0.0249(11)	0.0499(11)	0.0997(11)	0.1484(11)	0.1952(11)	0.2813(11)
2008	0.2720(9)	0.0312(9)	0.0609(9)	0.1159(9)	0.1662(9)	0.2128(9)	0.2985(9)
2009	0.2667(10)	0.0298(10)	0.0582(10)	0.1109(10)	0.1590(10)	0.2033(10)	0.2860(10)

[1]В 1999–2006 рр. як критерій диференціації застосовувався показник ”середньодушові сукупні витрати“
.

Джерело: *Розраховано автором за даними Держкомстату України.*

У дужках наведено порядок значень індексів за зменшенням. Лише при $\varepsilon = 0.5$ впорядкування значень індексу Аткінсона за вказаний період збігається із впорядкуванням відповідних значень індексу Джині, і лише для 2001 року (максимальна нерівність) позиція індексу Аткінсона при усіх значеннях параметра збігається із позицією індексу Джині.

Декомпозиція індексу Аткінсона за демографічними групами. Індекс нерівності Аткінсона не може бути адитивно розкладений, проте він допускає мультиплікативну декомпозицію [2,5,8]. Зазначена декомпозиція дає змогу висвітлити деякі нові аспекти міжгрупової нерівності, що залишались поза увагою дослідників.

Нехай популяція із N осіб складається із K вичерпних та взаємно виключних груп по N_k осіб кожна, $\sum_{k=1}^{K} N_k = N$. При заданому розподілі доходів $X = (x_1, x_2, ..., x_N)$ нехай $X_k = (x_{k1}, x_{k2}, ..., x_{kN_k})$– розподіл доходів групи k, отже $X = (X_1, X_2, ..., X_K)$.

Позначимо через $e = (\mu, \mu, ..., \mu)$ розподіл, у якому усі особи отримують однаковий середній дохід. Аналогічно $e_k = (\mu_k, \mu_k, ..., \mu_k)$– розподіл, у якому усі особи групи отримують середній груповий дохід. Популяційна та доходна частки, відповідно, становлять $q_k = N_k / N$ та $w_k = (N_k \mu_k) / (N\mu)$. Тоді величину $EA_\varepsilon(x) = 1 - A_\varepsilon(x)$, де $A_\varepsilon(x)$ – індекс нерівності Аткінсона, природно називати індексом рівності Аткінсона. Міжгрупова компонента індексу рівності, тобто індекс рівності для розподілу доходів, у якому є K-егалітарних груп, визначається так:

$$EA_{B\varepsilon}(X_k)=\begin{cases}\dfrac{1}{\mu}\left(\sum\limits_{k=1}^{K}q_k(\mu_k)^{1-\varepsilon}\right)^{\frac{1}{1-\varepsilon}}, \varepsilon>0,\varepsilon\neq 1\\ \dfrac{1}{\mu}\prod\limits_{k=1}^{K}(\mu_k)^{q_k}, \quad \varepsilon=1\end{cases}.$$

Тобто індекс міжгрупової рівності Аткінсона – це відношення середнього значення порядку $(1-\varepsilon)$ (середнього геометричного при $\varepsilon=1$) до середнього арифметичного значення. Тоді

$$EA_{\varepsilon}(X_1,X_2,...,X_K)=EA_{W\varepsilon}\cdot EA_{B\varepsilon}. \qquad (5)$$

Співмножник $EA_{W\varepsilon}$ є зваженим середнім значенням порядку $(1-\varepsilon)$ групових рівностей і представляється наступною функціональною формою:

$$EA_{W\varepsilon}=\begin{cases}\left(\sum\limits_{k=1}^{K}\dfrac{q_k^{\varepsilon}w_k^{1-\varepsilon}}{\sum\limits_{k=1}^{K}q_k^{\varepsilon}w_k^{1-\varepsilon}}(EA_{k\varepsilon})^{1-\varepsilon}\right)^{\frac{1}{1-\varepsilon}}, \varepsilon>0,\varepsilon\neq 1\\ \prod\limits_{k=1}^{K}(EA_{k1})^{q_k}, \quad \varepsilon=1\end{cases}.$$

Якщо рівність в усіх групах однакова, середнє арифметичне значення та середнє значення порядку $(1-\varepsilon)$ збігаються. Якщо більшою є різниця в рівності груп, меншим буде середнє значення порядку $(1-\varepsilon)$. В цьому сенсі середнє значення порядку $(1-\varepsilon)$ має перевагу над середнім арифметичним, особливо в ситуаціях, коли нерівність у групах дуже висока. Зазначимо, що лише при $\varepsilon=1$ внутрішньогрупова та міжгрупова компоненти є незалежними. Рівнорозподілений еквівалентний дохід для такого значення ε рівний середньому геометричному значенню, $\mu_0=x_{ede}=\prod\limits_{i=1}^{N}(x_i)^{1/N}$. У такому випадку маємо:

$$EA_{\varepsilon=1}=EA_{W,1}\cdot EA_{B,1}=\left(\prod_{k=1}^{K}\left(\frac{\mu_{0,k}}{\mu_{1,k}}\right)^{q_k}\right)\cdot\left(\frac{1}{\mu}\prod_{k=1}^{K}(\mu_{1,k})^{q_k}\right), \qquad (6)$$

де $\mu_{0,k}=\prod\limits_{i=1}^{N_k}(x_{ik})^{\frac{1}{N_k}}$ – середнє геометричне значення доходів у групі $k=1, 2, ..., K$.

Перший співмножник в (6) є компонентою внутрішньогрупової рівності, а другий – індексом міжгрупової рівності. Логарифмуючи (5), отримуємо лінеаризацію, $\ln EA_{\varepsilon}=\ln EA_{W\varepsilon}+\ln EA_{B\varepsilon}$, що дає можливість оцінити відносний вплив змін у груповій та міжгруповій нерівностях на значення індексу Аткінсона.

Інший спосіб декомпозиції індексу Аткінсона полягає в представленні внутрішньогрупової та міжгрупової компонент в термінах рівнорозподіленого еквівалентного доходу x_{ede}. У цьому разі групова декомпозиція індексу Аткінсона може бути подана у виді:

$$(1-A_\varepsilon)=(1-A_{W\varepsilon})(1-A_{B\varepsilon}),\ A_\varepsilon = A_{W\varepsilon}+A_{B\varepsilon}-A_{W\varepsilon}\cdot A_{B\varepsilon},$$

де

$$A_{W\varepsilon}=1-\sum_{k=1}^{K}\frac{q_k\mu_k x_{ede,\varepsilon,k}}{\mu_k\mu}=1-\sum_{k=1}^{K}\frac{w_k x_{ede,\varepsilon,k}}{\mu_k}=\sum_{k=1}^{K}w_k(1-\frac{x_{ede,\varepsilon,k}}{\mu_k})=\sum_{k=1}^{K}w_k A_{k,\varepsilon},$$

$$A_{B\varepsilon}=1-x_{ede}/(\sum_{k=1}^{K}q_k x_{ede,k}).$$

На відміну від попередньої декомпозиції, де компоненту міжгрупової рівності визначено за середніми груповими доходами, в даному випадку ця компонента визначена за рівнорозподіленими еквівалентними груповими доходами. Індекс внутрішньогрупової нерівності, своєю чергою, може бути розкладений:

$$\Delta A_W=\sum_{k=1}^{K}(q_{k,0}-q_{k,1})\frac{1}{2}(\frac{x_{ede,k,0}}{\mu_{k,0}}+\frac{x_{ede,k,1}}{\mu_{k,1}})+\sum_{k=1}^{K}(\frac{x_{ede,k,0}}{\mu_{k,0}}-\frac{x_{ede,k,1}}{\mu_{k,1}})\frac{1}{2}(q_{k,0}+q_{k,1}), \quad (7)$$

$$\Delta A_W=\sum_{k=1}^{K}(w_{k,1}-w_{k,0})\frac{1}{2}(A_{k,1}+A_{k,0})+\sum_{k=1}^{K}(A_{k,1}-A_{k,0})\frac{1}{2}(w_{k,1}+w_{k,0}). \quad (8)$$

Декомпозицію (7) доцільно використовувати при оцінюванні хронологічних змін групової нерівності: перша сума відображає вплив популяційних змін на нерівність, а друга – вплив нерівності в групах. Друга декомпозиція може бути також використана при оцінюванні впливу різних джерел доходів на нерівність. Перша сума в (8) є зміною в групових доходних частках, що є наслідком елімінування одного джерела. Друга сума оцінює зміни в груповій нерівності, спричинені таким видаленням.

Декомпозиція індексу Аткінсона за джерелами доходів. Індекси нерівності, які представляються у виді зваженої суми індивідуальних доходів, можуть бути розкладені за доходними джерелами [8,11]. При цьому природною є вимога до правила декомпозиції, згідно із якою внесок джерела доходу до нерівності є від'ємним, якщо усі особи отримують від цього джерела однаковий додатний дохід. Якщо цією умовою нехтувати, то декомпозиція нерівності зводиться до процедури оцінювання впливу маргінальних змін компонентів доходів за допомогою еластичностей. При цьому не вимагається, щоб індекс нерівності міг бути розкладений за джерелами доходів. Достатньо, щоб він був незалежним від середнього значення та задовольняв принципу трансферів Пігу – Дальтона. Використовуючи процедуру Лемана – Іцхакі [2], отримуємо еластичність індексу Аткінсона за джерелами доходів:

$$\eta_k(A_\varepsilon)=\begin{cases}\left[\frac{1-A_\varepsilon}{A_\varepsilon}\right]\left[\frac{\mu_k}{\mu}-\{\mu(1-A_\varepsilon)\}^{1-\varepsilon}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i^{-\varepsilon}x_{i,k}\right], \varepsilon\neq 1\\ \left[\frac{1-A_\varepsilon}{A_\varepsilon}\right]\left[\frac{\mu_k}{\mu}-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{x_{i,k}}{x_i}\right)\right], \varepsilon=1\end{cases}.$$

Оскільки індекс Аткінсона (як і усі відносні індекси) є однорідною функцією порядку нуль по доходних компонентах, $\sum_{k=1}^{K}\eta_k(A_\varepsilon)=0$.

Прогресивність податкових систем. У контексті обговорення проекту Податкового кодексу доцільно розглянути використання індексу Аткінсона при дослідженні перерозподільчих властивостей податкових систем. Більшість податкових систем побудовані за принципом прогресивності. Ідея полягає у використанні прогресивної шкали як інструменту перерозподілу доходів. Прогресивний податок в загальному випадку характеризується зростанням рівня податків при зростанні доходів. У зв'язку із цим, прогресивна податкова система супроводжується двома ефектами, на які посилаються як на перерозподіл та диспропорційність (відхилення від пропорційності). Нехай x – сукупний дохід платника податків; $t(x)$ – двічі диференційовна функція (функція податкових зобов'язань). Середній та граничний рівень податків особи із доходом x позначимо через $a(x)=t(x)/x$ та $m(x)=dt(x)/dx=t'(x)$, відповідно. Нехай x_0 – рівень доходів, за якого особа звільняється від податкових зобов'язань. Запровадження мінімального рівня доходів, який не оподатковується, дає можливість відрізняти пряму прогресивність, коли немає звільнення від оподаткування, від непрямої, коли таке звільнення має місце. За цієї умови ефект прогресивності виникає лише за рахунок запровадження мінімального рівня доходу, який не оподатковується. Лінійна податкова система визначається за допомогою [3]:

1. Податкового зобов'язання виду

$$t(x)=\max\{m(x-b);0\}=\begin{cases} m(x-b), & x\ge b\\ 0, & x<b\end{cases}, \qquad (10)$$

де $b>0$ – доходний рівень звільнення від податку, $0\le m\le 1$ – постійний маргінальний податковий рівень, $x\ge 0$.

2. Середнього рівня податків

$$a(x)=\frac{t(x)}{x}=\frac{\max\{m(x-b);0\}}{x}=\begin{cases} m-mb/x, & x\ge b\\ 0, & x<b\end{cases}. \qquad (11)$$

У випадку постійного граничного податкового рівня за умови звільнення від оподаткування $b>0$, середній податковий рівень залишається зростаючим, оскільки частка сукупного доходу, звільненого від податків, при зростанні доходів зменшується. Отже, для побудови прогресивної податкової системи, яка скорочує нерівність, можна запровадити пропорційний податок із постійним граничним податковим рівнем за умови, що має місце гарантоване звільнення від оподаткування. Звільнення від оподаткування забезпечує зростання середнього податкового рівня. Податкова система є прогресивною, якщо в результаті оподаткування нерівність доходів зменшується, і регресивною, коли нерівність зростає. Якщо в результаті оподаткування нерівність не змінюється, таку податкову систему будемо називати нейтральною по податках (нерівність–нейтральною). Коли має місце нульовий рівень звільнення від оподаткування, нерівність-нейтральною системою буде пропорційна. Нехай $A_{\varepsilon,X}$, $A_{\varepsilon,X-T}$ та A_T – індекси Аткінсона передподаткового і післяподаткового доходу та індекс нерівності податкових зобов'язань. Індекс прогресивності податкової системи та індекс впливу прогресивності (індекс ефективної прогресивності) можуть бути визначені, відповідно, так: $PR_{A_\varepsilon} = A_{\varepsilon,X} - A_{\varepsilon,X-T}$, $PR_{A_\varepsilon}^{eff} = (1 - A_{X-T})/(1 - A_X)$. Каквані [3], використовуючи індекс Джині та криві Лоренса, визначає поняття прогресивності податкової системи на основі еластичності функції податкових зобов'язань за сукупними доходами. Мірою прогресивності податкової системи при цьому є відхилення реальної податкової системи від пропорційної. Індекс відхилення від пропорційності, на основі використання індексу Аткінсона, може бути подано у виді: $PR_{K,A_\varepsilon} = A_{\varepsilon,T} - A_{\varepsilon,X}$.

Якщо має місце пропорційна податкова система без звільнення від оподаткування, індекси $A_{\varepsilon,T}$ та $A_{\varepsilon,X}$ збігаються і $PR_{K,A_\varepsilon} = 0$. Якщо $PR_{K,A_\varepsilon} > 0$, податкова система є прогресивною, і навпаки. Розглянемо індекси, які відображають рівень перерозподілу податкової системи:

$$PR_{KF}(\varepsilon) = A_{X,\varepsilon} - A_{X-T,\varepsilon}, \qquad (12)$$

$$PR_{BD}(\varepsilon) = \frac{A_{X,\varepsilon} - A_{X-T,\varepsilon}}{1 - A_{X,\varepsilon}}. \qquad (13)$$

Дві податкові системи, які зменшують значення індексу нерівності Аткінсона на однакову величину, будуть розглядатись індексом (12) як такі, що мають однаковий рівень прогресивності. Проте індекс (13), запропонований Блеккорбі та Дональдсоном [6], буде вказувати на вищий рівень перерозподілу у випадку більшої нерівності передподаткового розподілу доходів.

Застосування будь-якої податкової системи приводить до зміни значень індексу Аткінсона та індексів соціального добробуту. Тому системи оподаткування мають конкретні математичні властивості, дослідження яких дає потужні аналітичні засоби для аналізу реально функціонуючих систем. Можуть бути встановлені екстремальні значення індексів нерівності. Різні податкові системи по-різному впливають на рівень добробуту різних соціальних груп. Відповідні криві Лоренса можуть перетинатись. Проте для податкової системи існує оптимальна система, яка домінує, за Лоренсом, усі інші системи, а індекс нерівності якої є мінімальним. Є податкова система із найвищою кривою Лоренса та мінімальним значенням індексу нерівності. Важливою особливістю є те, що різні, в тому числі граничні, значення індексів нерівності та добробуту можуть бути досягнуті шляхом реформи податкової системи, яка дає однакову величину податкових надходжень. Нехай A_0–мінімальне значення індексу Аткінсона, яке може бути досягнуте при запровадженні податкової системи із фіксованими надходженнями (соціальної програми із фіксованим бюджетом). Ефективність реальної податкової системи може бути оцінена за допомогою індексу:

$$IT = \frac{A_X - A_{X-T}}{A_X - A_0} 100, \qquad (14)$$

який характеризує скорочення нерівності у відсотках відносно максимального скорочення, яке може бути досягнуте за фіксованої величини середнього податку μ_T (фіксованого обсягу податкових надходжень, $T = N\mu_T$). У цьому полягає відмінність (14) від існуючих підходів до вимірювання впливу прогресивності та перерозподілу на нерівність доходів після оподаткування. Дійсно індекс перерозподілу Блеккорбі–Дональдсона $PR_{BD} = (A_{X,\varepsilon} - A_{X-T,\varepsilon}) / (1 - A_{X,\varepsilon})$ виражає реальне скорочення нерівності як відсоток передподаткової нерівності.

Податкові системи із рівнорозподіленою втратою корисності. Принцип рівності втрати корисності є одним із найбільш відомих методів побудови податкових систем, згідно із яким податкові зобов'язання платників податків повинні бути рівними за втратою корисності [9,10]. Рівність втрат корисності може означати пропорційну рівність, абсолютну рівність або маргінальну рівність. Розглядаємо абсолютну версію рівності втрат від оподаткування. Припускаємо, що критерієм для вибору функції податкових зобов'язань є рівність втрат корисності:

$$u(x) - u(x - t(x)) = u_0, \forall x \geq x_0 > 0, u_0 > 0.$$

Нехай ми маємо податкову систему (10)–(11) та лінійну функцію корисності $u(x) = x$. Рівність втрат означає фіксований податок $t(x) = u_0, \forall x > x_0$. Логарифмічна функція корисності $u(x) = \ln x$ означає пропорційний податок:

$$t(x) = \left[1 - e^{-u_0}\right] x, \forall x \geq x_0. \tag{15}$$

Тривалий час вважалось, що рівність абсолютних втрат корисності гарантується лише пропорційною або прогресивною податковими системами. Проте наведений приклад свідчить, що це визначається вибором функції корисності. У випадку однакових втрат використовуємо функцію корисності Аткінсона $u = x^{1-\varepsilon} / (1-\varepsilon), \varepsilon > 0, \varepsilon \neq 1; \ln x, \varepsilon = 1$. Оскільки функція податкових зобов'язань із рівнорозподіленими втратами набуває виду $t(x) = x - \left[x^{1-\varepsilon} - (1-\varepsilon)u_0\right]^{1/(1-\varepsilon)}$, очевидно, що $t'(x) = 1 - \left[1 - t(x)/x\right]^{\varepsilon}$. Тобто при $\varepsilon > 1$ функція податкових зобов'язань є прогресивною, при $\varepsilon = 1$ – пропорційною та при $\varepsilon < 1$ – регресивною.

Розглянемо зв'язок між рівнем втрат u_0, податковими надходженнями, нерівністю та соціальним добробутом. Функція соціального добробуту Аткінсона [4] для передподаткового розподілу доходів має вид $W_X = u_{\varepsilon}(\mu_X (1 - A_{X,\varepsilon}))$, де μ_X – середній дохід перед оподаткуванням, $A_{X,\varepsilon}$ – індекс Аткінсона до оподаткування. Нехай W_{X-T} – рівень соціального добробуту після оподаткування. Тоді втрати добробуту при використанні податкової функції із рівнорозподіленою втратою корисності становлять $\Delta W = W_X - W_{X-T} = (1 - F(x_0))u_0$, де x_0 – рівень звільнення від оподаткування. Для W_{X-T} при $\varepsilon \geq 1$ (тобто у випадку нерегресивності) маємо $W_{X-T} = u_{\varepsilon}((1-e)\mu_X (1 - A_{X-T,\varepsilon}))$, де e – податкове навантаження, $A_{X-T,\varepsilon}$ – індекс нерівності Аткінсона після оподаткування.

Таким чином, зміни в рівні соціального добробуту можуть бути представлені у виді:

$$\Delta W = \begin{cases} [1 - F(x_0)]u_0 = W_X \left\{ 1 - \left[(1-e)(1 + PR_{BD}(\varepsilon)) \right]^{1-\varepsilon} \right\} \varepsilon > 1 \\ \left[1 - F(x_0) \right] u_0 = -\ln \left[(1-e)(1 + PR_{BD}(1)) \right], \varepsilon = 1 \end{cases}$$

Отже, втрати добробуту будуть вищими за необхідності збільшення податкових надходжень та меншими при вищій прогресивності податкової системи. Зрозуміло, що прогресивність $PR_{BD}(\varepsilon) < 0$ при $\varepsilon < 1$ та зростає по ε.

Висновки. У статті докладно розглянуто теоретичне підґрунтя побудови індексу нерівності Аткінсона. Отримано оцінки нерівності за сукупними доходами в Україні за період 1999–2009 рр. Розглянуто два методи мультиплікативної декомпозиції індексу за демографічними групами. У першому методі міжгрупова компонента визначена за середніми груповими доходами. Подальша лінеаризація дає можливість оцінити відносний внесок міжгрупової та групової компонент до загальної нерівності. Інший метод полягає в представленні внутрішньогрупової та міжгрупової компонент у термінах рівнорозподіленого еквівалентного доходу. Таку декомпозицію доцільно також використовувати при оцінюванні хронологічних змін групової нерівності (рівняння (8)) та при оцінюванні впливу різних джерел доходів на нерівність (рівняння (9)).

При декомпозиції нерівності за джерелами доходів природною є вимога, згідно із якою внесок рівнорозподіленого джерела є від'ємним. Такій умові задовольняють лише індекси узагальненої ентропії за значень параметра $0 < \alpha < 2$. Оскільки пряма декомпозиція індексу Аткінсона (а також індексу Джині) за джерелами доходів теоретично безпідставна, запропоновано узагальнення методики Іцхака–Лемана оцінювання еластичності коефіцієнта Джині по доходних джерелах на індекс Аткінсона.

Розглянуто можливості використання індексу Аткінсона як корисного інструменту дослідження податкової політики. Зокрема, індекси, які традиційно використовуються при оцінюванні рівня перерозподілу податкової системи, залежать від нерівності передподаткових доходів (доходів-брутто). Щоб уникнути такої залежності, запропоновано оцінювати ефективність реальної податкової системи за допомогою індексу, який характеризує скорочення нерівності у відсотках відносно максимально можливого, яке може бути досягнуте за фіксованої величини середнього податку (фіксованого обсягу податкових надходжень).

Джерела

1. *Маршалл А., Олкин И.* Неравенства: теория мажоризации и ее приложения. – М.: Мир, 1983. – 576 с.

2. *Семенов В.В.* Економіко-статистичні моделі та методи дослідження соціальних процесів: нерівність, бідність, поляризація: Т. 1. Нерівність / В.В. Семенов – Полтава: РВВ ПУСКУ, 2008. – 237с.

3. *Семенов В.В.* Економіко-статистичні моделі та методи дослідження соціальних процесів: нерівність, бідність, поляризація: Т. 2. Бідність та поляризація / В.В. Семенов – Полтава: РВВ ПУСКУ, 2008. – 269с.

4. *Atkinson A.B.* On the Measurement of Inequality//Journal of Economic Theory. – Vol.2, 1970. – P. 244–263.

5. *Blackorby C. and D. Donaldson, M. Auersperg.* A New Procedure for the Measurement of Inequality within and among Population Subgroups//The Canadian Journal of Economics. – Vol.14, No.4, 1981. – P. 665–685.

6. *Blackorby C. and D. Donaldson*. Ethical Social Index Numbers and the Measurement of Effective Tax/Benefit Progressivity// The Canadian Journal of Economics. – Vol.17, No.4, 1984. – P. 683–694.

7. *Dalton H*. The Measurement of the Inequality of Income//The Economic Journal. –Vol.30, No.119, 1920. – P. 348–361.

8. *de la Vega C.L.* A new factorial decomposition for the Atkinson measure // Economics Bulletin. –Vol.4, No.29, 2003. – P. 1–12.

9. *Lambert P.J*. Inequality Reduction through the Income Tax//Economica. – Vol. 60, No. 239, 1993. – P. 357–365.

10. *Lambert P.J. and H.T. Naughton*. The equal absolute sacrifice principle revisited//Journal of Economic Surveys. – Vol.23, No.2, 2009. – P.328–349.

11. *Paul S.* Income sources effects on inequality//Journal of Development Economics. – Vol.73, 2004. – P. 435–451.

12. *Rawls J*. Some Reasons for the Maximin Criterion//The American Economic Review. –Vol.64, No.2, 1974. –P.141–146.

Анотація. У статті розглянуто теоретичне підґрунтя побудови індексу нерівності Аткінсона; досліджені методи мультиплікативної декомпозиції за демографічними групами та за джерелами доходів. Розглянуто способи використання індексу Аткінсона при аналізі прогресивності та перерозподільчих властивостей податкових систем.

Аннотация. В статье рассмотрены теоретические основы построения индекса неравенства Аткинсона, исследованы методы мультипликативной декомпозиции по демографическим группам и по источникам доходов. Рассмотрены способы использования индекса Аткинсона при анализе прогрессивности и перераспределительных особенностей налоговых систем.

Summary. In 2010 celebrated the fortieth anniversary of the publication of your famous article by Anthony B. Atkinson “On the Measurement of Inequality”, which was announced a new index of inequality and which subsequently received the name of the author. This paper is made and carries a determining role in the development of welfare economics and theory of social choice. Evaluation of welfare for income distribution (or any other variable associated with individual well-being) is an important task of society economics. Logical completeness of this approach means that we should be able to compare any two distributions of income and determine which of them corresponds to a higher level of social welfare. The article reviews the theoretical basis of construction of the Atkinson inequality index; multiplicative decomposition methods studied by demographic groups and by source of income. Methods of use the Atkinson index for analysis of progressivity and redistributive property of tax system was considered.

***Ключові слова**: індекс Аткінсона, принцип Пігу–Дальтона, декомпозиція, прогресивність податкової системи.*

***Ключевые слова**: индекс Аткинсона, принцип Пигу–Дальтона, декомпозиция, прогрессивность налоговой системы.*

***Key words**: Atkinson index, Pigou–Dalton principle, decomposition, tax progressivity.*

Стаття надійшла до редакції журналу 15.07.2010 р.